La delizia degli idioti

(Problema di Febbraio 2011)

Problema:

Rudy e Piotr stanno giocando un solitario a due che consiste nel girare contemporaneamente sul tavolo una carta da due mazzi accuratamente mescolati di 52 carte ciascuno.
Se durante lo svolgimento del gioco (fino alla fine del mazzo) non escono mai contemporaneamente due carte uguali sia per seme che per numero, vince chi ha scommesso su *no-match*, altrimenti chi ha scommesso su *match*.
Piotr, avendo scommesso su quanto consigliato da Rudy, sta vincendo.
Bisogna dire su quale evento ha puntato Piotr e quali sono le probabilità teoriche di vittoria per ciascuno dei due casi.

Risposta:

Piotr ha puntato su *match* e le probabilità sono:
match 63,212% ≈ 1 - 1/e *no-match* 36,788% ≈ 1/e

Spiegazione:

Poiché le carte devono combaciare sia per numero che per seme, ciascuna delle 52 carte del mazzo va considerata diversa dalle altre per cui possiamo indicarle semplicemente con i numeri da 1 a 52, inoltre, poiché i mazzi sono accuratamente mescolati, la probabilità di *match* sarà indipendente dalla particolare permutazione delle carte di uno dei due mazzi ma dipenderà dal rapporto reciproco delle permutazioni, per cui possiamo tenere fissa una permutazione particolare ad esempio del mazzo di Piotr e considerare tutte le *52!* Permutazioni delle carte del mazzo di Rudy.
Per effettuare questa analisi partiamo da un caso semplice (due mazzi di 4 carte) e consideriamo i casi favorevoli delle *4! = 24* possibilità.
Indichiamo con *1234* la permutazione del mazzo di Piotr; con x una carta in una posizione tale che può sia coincidere che non coincidere mentre con il numero appropriato le carte sicuramente coincidenti per cui avrò:
3! *1xxx* cui vanno sommati
3! *x2xx* ma **2!** *12xx* sono stati già conteggiati in precedenza e quindi vanno tolti,
a questi aggiungiamo **3!** *xx3x* cui vanno tolti **2!** *1x3x* e **2!** *x23x* ma vanno risommati **1!** *123x* perché già sottratti in precedenza…
Continuando il ragionamento avremo:
3! *1xxx* + **3!** *x2xx* - **2!** *12xx* + **3!** *xx3x* - **2!** *1x3x* - **2!** *x23x* + **1!** *123x* + **3!** *xxx4* - **2!** *1xx4* - **2!** *x2x4* + **1!** *12x4* - **2!** *xx34* + **1!** *1x34* – **0!** *1234*
Riordinando i termini abbiamo: (**3!** *1xxx* + **3!** *x2xx*+ **3!** *xx3x* + **3!** *xxx4)* - (**2!** *12xx*+ **2!** *1x3x* + **2!** *x23x* + **2!** *1xx4* + **2!** *x2x4* + **2!** *xx34)* + (**1!** *123x* + **1!** *12x4* + **1!** *1x34)* - **0!** *1234*

Il numero di match nel caso n=4 sarà: $\binom{4}{1}\cdot 3! - \binom{4}{2}\cdot 2! + \binom{4}{3}\cdot 1! - \binom{4}{4}\cdot 0!$

In generale, si avrà: $\binom{n}{1}\cdot n! - \binom{n}{2}\cdot (n-1)! + \ldots +/- \binom{n}{n}\cdot 0!$

Sviluppando i coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ e dividendo per $n!$ (numero di permutazioni) si ottiene la probabilità di match che è pari a $P(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\cdot \dfrac{1}{i!}$.

Ricordando lo sviluppo in serie di $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{x^i}{i!}$ troviamo che per n abbastanza grande sarà *P(n)= 1 – 1/e* ≈ 63,212%.